

4 THEORIE DE LA PORTANCE

4.1 Introduction

→ Objectif: calculer la portance d'une aile mince se déplaçant avec un angle d'attaque α et établir la formule

$$\Gamma = -\pi U L \sin \alpha$$

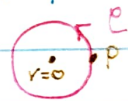
→ Hypothèse: fluide non visqueux ($\nu=0$) et écoulement irrot. ($\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$)

4.2 Potentiel de vitesse et fonction du courant

→ Si $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$, on peut écrire $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi$ et $\phi(p) = \phi(0) + \int_0^p \vec{u} \cdot d\vec{x}$
indépendante du chemin si domaine simplement connexe.

↳ Si le domaine n'est pas simplement connexe, ϕ est multi-valeur.

→ Exemple: $\vec{u} = \frac{k}{r} \vec{t}_\theta$



$$\Rightarrow \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \frac{k}{r} \vec{t}_\theta \cdot r d\theta \vec{t}_\theta = \int_0^{2\pi} k \cdot d\theta = 2\pi k \Rightarrow \phi = \phi_0 + 2\pi k$$

On veut que $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \Rightarrow \frac{1}{r} \partial_\theta \phi = \frac{k}{r} \Rightarrow \partial_\theta \phi = k \Rightarrow \phi = k\theta$ définit à un multiple de $2\pi k$ près.

DEF La circulation de $\vec{u}$ sur le contour C est donnée par

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{x}$$

⊙ Fonction de courant:

→ On fait l'hypothèse d'un écoulement en 2-D et incompressible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \exists \vec{B} \text{ tq } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y, \partial_z B_x - \partial_x B_z, \partial_x B_y - \partial_y B_x)$$

On choisit $\vec{B} = \psi \vec{t}_z$. Alors $\vec{u} = [u, v] = [\partial_y \psi, -\partial_x \psi]$

DEF On définit alors la fonction de courant ψ , liée à $\vec{u}$ par:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

→ Propriété: $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \psi = \partial_y \psi \cdot \partial_x \psi + (-\partial_x \psi) \partial_y \psi = 0$

$\Rightarrow \psi$ est constant le long d'une ligne de courant.

4.3 Potentiel complexe

→ Pour un fluide 2-D, incompressible, irrotationnel, on a :

$$u = \partial_x \varphi = \partial_y \psi \quad \text{et} \quad v = \partial_y \varphi = -\partial_x \psi$$

→ Les fctrs (φ, ψ) obéissent aux équations de Cauchy-Riemann

Si leur dérivée est continue, on peut définir :

DEF

On définit le potentiel complexe d'écoulement W selon :

$$W \equiv \varphi + i\psi$$

qui est une fonction analytique de la variable $z = x + iy$

→ φ et ψ satisfaisant à l'équation de Laplace : $\partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi = 0$

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = 0$$

→ Les composantes de la vitesse peuvent être obtenues à pd W :

$$W'(z) \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{W(z + \Delta z) - W(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{W(z + \Delta x) - W(z)}{\Delta x} = \frac{\partial W}{\partial x} = \partial_x \varphi + i \partial_x \psi$$

$$\frac{dw}{dz} = u - i v \quad \text{de norme} \quad \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

○ Exemple : écoulement uniforme sous un angle α p/r à l'axe x

→ On a : $u = U \cos \alpha$, $v = U \sin \alpha \Rightarrow \frac{dw}{dz} = U \cos \alpha - i U \sin \alpha$

$$= U e^{-i\alpha}$$

$$\Rightarrow W = U z e^{-i\alpha}$$

○ Exemple : vortex linéaire

→ On a $\vec{u} \equiv \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$. On a montré (→ 4.2) que $\phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$

Par ailleurs : $u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi = 0 \Rightarrow \partial_\theta \psi = 0$

et $u_\theta = -\partial_r \psi \Rightarrow \partial_r \psi = -\Gamma / 2\pi r \Rightarrow \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

Ainsi :

$$W = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \ln r) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i \theta) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

4.4 Méthode des images

- ③ Théorème de Milne-Thomson
→ permet d'obtenir un écoulement autour d'un disque

Thm Soit $w = f(z)$ un potentiel complexe dont toutes les singularités se situent en $|z| > a$.

Alors $w' = f(z) + \overline{f(a^2/\bar{z})} = f(z) + \overline{f}(a^2/\bar{z})$ est le potentiel complexe d'un écoulement qui a les mêmes singularités que f pour $|z| > a$ et dont le cercle $|z| = a$ est une ligne de courant

DEMO!

- ① Comme toutes les singularités de f se trouvent en $|z| > a$, celles de $\overline{f}(a^2/\bar{z})$ se trouvent en $|a^2/\bar{z}| > a$
 $\Leftrightarrow |z| < a$

Donc $w = f(z) + \overline{f}(a^2/\bar{z})$ ne rajoute pas de singularité en $|z| > a$.

- ② Sur le cercle de rayon a , on a $z\bar{z} = a^2 \Leftrightarrow \bar{z} = a^2/z$
 $\Rightarrow w(r=a) = f(z) + \overline{f}(\bar{z})$

↳ Donc w est réel sur le bord du disque et $\psi = 0$ = cste
Le cercle est donc une ligne de courant 

4.5 Écoulement irrotationnel autour d'un cylindre

- Soit un écoulement uniforme dans la direction x . On a $w = Uz$ car on avait $w = Uz e^{-i\alpha}$, ici $\alpha = 0$.

Par Milne-Thomson, pour que $r=a$ devienne une ligne de courant, $w = Uz + U(a^2/\bar{z}) = U(z + a^2/\bar{z})$

↳ écoulement autour d'un cylindre sans circulation

- Rajoutons une circulation :

$$w = U(z + a^2/\bar{z}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = U(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

$$\Rightarrow \varphi = U(r + a^2/r) \cos \theta + \Gamma \theta / 2\pi$$

$$\psi = U(r - a^2/r) \sin \theta + \Gamma \ln(r) / 2\pi$$

↳ Le fluide glisse sur le cylindre:

$$u_\theta = -\partial_r \Psi = -U(1 + a^2/r^2) \sin \theta + \Gamma/2\pi r$$

$$u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi = U(r - a^2/r) \cos \theta$$

→ Par Bernoulli: $p + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{cst} = C_1$ en $r=a$ (qui est une ligne de courant). Sur le cylindre,

$$p/\rho = C_1/\rho - \frac{1}{2} u^2|_{r=a}$$

$$= C_1/\rho - \frac{1}{2} \left(-2U \sin \theta + \Gamma/2\pi a \right)^2$$

$$= C_2 - 2U^2 \sin^2 \theta + \Gamma U \sin \theta / \pi a$$

Or, par symétrie $\theta \mapsto \pi - \theta$, il ne peut y avoir de force suivant x . Selon y , on a:

$$L_y = - \int_0^{2\pi} p \left. \frac{\partial r}{\partial y} \right|_y a \cdot d\theta = a \int_0^{2\pi} \rho \left(+2U^2 \sin^2 \theta - \frac{U\Gamma}{\pi a} \sin \theta \right) \sin \theta d\theta$$

$$= -\rho U \Gamma$$

⇒ Il n'y a pas de portance si $\Gamma=0$. Si $\Gamma < 0$, la pression est plus basse au dessus du cylindre → le cylindre monte.

4.6 Transformation conforme

→ On veut transformer le cylindre par des transformations conformes jusqu'à obtenir la forme d'une aile d'avion.

→ Soit $w(z) = \phi(z) + i\psi(z)$ un potentiel complexe dans le plan complexe z ($dw/dz = u - iv$). On définit $Z \equiv f(z)$ une fct analytique et son inverse F tq $F(Z) = z$. Alors

$W(Z) = w(F(Z))$ est une fct analytique de Z . On note

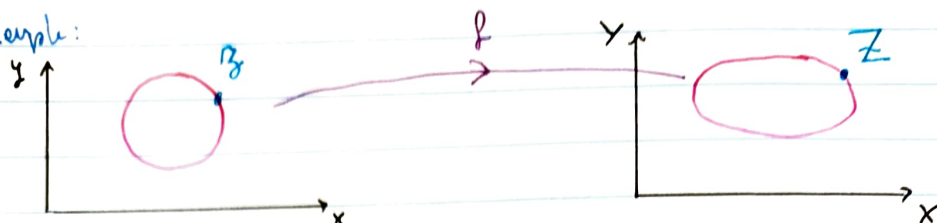
$$Z = X + iY \text{ et } W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$$

↳ Comme $w \circ F$ est analytique, Φ et Ψ satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann et on définit

$$u_x(X, Y) \equiv \partial_X \Phi = \partial_X \Psi \quad v_x \equiv \partial_X \Phi = -\partial_X \Psi \quad \hat{a}$$

u_x, v_x sont les composantes d'un écoulement irrotationnel et incompressible dans le plan (X, Y) .

exemple:



→ Par ailleurs, $w(z) = W(z) \rightarrow \Psi(z) = \psi(\bar{z})$

↳ une ligne de courant dans (x, y) est transformée en ligne de courant dans (X, Y) .

→ De plus $\frac{dW}{dz} = \frac{dw(z(z))}{dz} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz}$. Ainsi:

$$u_x - i v_x = \frac{u - i v}{f'(z(z))}$$

→ Enfin, on impose que l'écoulement ne soit pas modifié loin de l'obstacle: $\lim_{|z| \rightarrow \infty} u_x - i v_x = u - i v \Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow \infty} f'(z) = 1$

DEF On définit la transformation de Kutta-Joukowski qui transforme un disque en aile d'avion:

$$Z = z + c^2/z$$

→ On a $f'(z) = 1 - c^2/z^2$ s'annule en $z = \pm c$

→ La fonction inverse:

$$z^2 + c^2 - zZ = 0 \Leftrightarrow z = \frac{Z}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - c^2}$$

4.7

Ecoulement irrot. autour d'un cylindre elliptique

→ Soit le bord du disque $z = a e^{i\theta}$. Sous l'action de la transformation de K-J, on a :

$$X + iY = Z = a e^{i\theta} + \frac{c^2}{a} e^{-i\theta} = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta + i \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta$$

$$\Rightarrow X = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta \quad \text{et} \quad Y = \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta$$

$$\text{On a alors } \frac{X^2}{a + c^2/a} + \frac{Y^2}{a - c^2/a} = 1 \leadsto \text{une ellipse !}$$

→ L'écoulement se transforme selon :

$$w(z) = U \left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

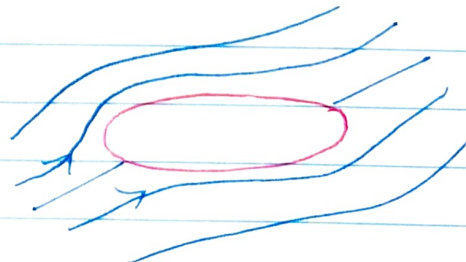
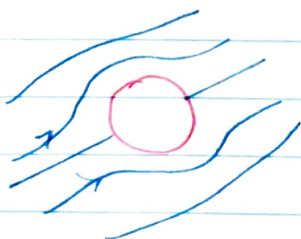
$$\leadsto W(Z(z)) = U e^{-i\alpha} \left(\frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{Z^2}{4} - c^2} \right) + U \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - c^2} \right]$$

$$\text{avec } 1/z : Z = z + c^2/z \Rightarrow \frac{Z - z}{c^2} = 1/z$$

$$\Rightarrow Z - \left(\frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{Z^2}{4} - c^2} \right) / c^2 = \left(\frac{1}{2} Z - \sqrt{\frac{Z^2}{4} - c^2} \right) / c^2$$

$$\leadsto W(Z(z)) = U e^{-i\alpha} \left(\frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - c^2} \right) + U e^{i\alpha} \frac{a^2}{c^2} \times \left(\frac{1}{2} Z - \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - c^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - c^2} \right]$$

Il s'agit d'un écoulement autour d'un disque elliptique sous un angle d'attaque α . Les lignes de courant sont représentées selon :



4.8 Écoulement irrotationnel autour d'une plaque mince

→ Dans la transfo de k - J , on prend $c = a$:

$Z = z + a^2/z$. Le disque $z = a e^{i\theta}$ se transforme alors selon
 $X + iY = Z = a e^{i\theta} + \frac{a^2}{a} e^{-i\theta} = a(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2a \cos \theta$

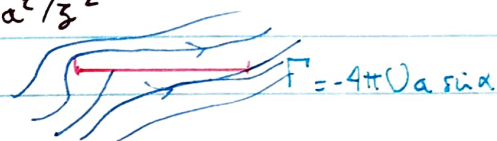
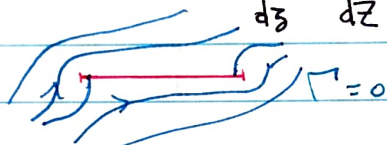
C'est une plaque mince dans le plan X

$$X = 2a \cos \theta, \quad Y = 0$$



→ Pour un écoulement de départ avec un angle d'attaque α dans le plan

$$Z : w_x - i w_y = \frac{dw}{dz} = \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/z^2) - i\Gamma/2\pi z}{1 - a^2/z^2}$$



↳ Il y a 2 singularités en $z = \pm a$. On doit annuler le dénominateur en $z = a$: on impose

$$U(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{a^2} e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \Leftrightarrow -2iU \sin \alpha - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = -4\pi U a \sin \alpha$$

↳ Il reste une singularité en $z = -a$, on ne peut lever qu'une singularité à la fois.

→ Les approximations utilisées (ex: pas de viscosité) sont mauvaises pour l'avant de l'aile.

Dans les ailes, l'avant de la plaque est plus épaisse, tq la singularité en $z = -a$ se trouve dans l'aile → plus de problème.



4.3 Ecoulement autour d'une aile symétrique

→ On considère un cercle de rayon $a + \lambda$ centré en $x = -\lambda$.

Dans le plan z , ce cercle s'écrit $z = -\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma}$

↳ On applique la transfo de K-J : $z \mapsto z + a^2/\bar{z}$

$$\bar{z} = -\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma} + \frac{a^2}{-\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma}}$$

Rappel : on avait $w(z) = U \left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\bar{z}} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$

→ L'écoulement autour du cylindre s'écrit

$$w(z) = U \left((z + \lambda) e^{-i\alpha} + \frac{(a + \lambda)^2}{\bar{z} + \lambda} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + \lambda)$$

→ L'écoulement autour de l'aile est donné par $w(z \mapsto \frac{1}{2}z + \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{4}})$

Les composantes de la vitesse s'écrivent sous la forme :

$$\frac{dw}{dz} = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{(a + \lambda)^2}{(\bar{z} + \lambda)^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi(\bar{z} + \lambda)} = u_x - i v_x$$

$$1 - a^2/\bar{z}^2$$

↳ La seule singularité problématique se situe en $z = a$ car $z = -a$ se trouve dans l'obstacle.

On choisit alors la circulation de manière à annuler le numérateur en la singularité :

$$U \left(1 - \frac{(a + \lambda)^2}{(\bar{z} + \lambda)^2} \right) \cos \alpha - i U \left(1 + \frac{(a + \lambda)^2}{(\bar{z} + \lambda)^2} \right) \sin \alpha - \frac{i\Gamma}{2\pi(\bar{z} + \lambda)} \Big|_{z=a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-i\Gamma}{2\pi(a + \lambda)} = i U 2 \sin \alpha \Rightarrow \Gamma = -4\pi(a + \lambda) U \sin \alpha$$

C'est la condition de Kutta-Joukowski

→ Pour une aile symétrique mince, $\lambda \ll a$ et $L = 4a$

$$\text{On a alors } \Gamma = -\pi L U \sin \alpha$$

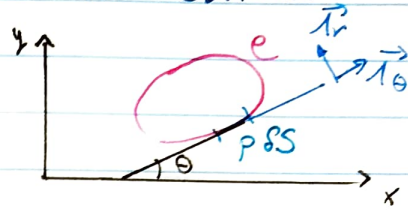
Rappel : thm des résidus

$$\text{Soit } f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \text{ Alors } \oint f(z) dz = 2\pi i \cdot c_{-1}$$

4.10 Théorème de Blasius

Thm Soit un écoulement irrotationnel, incompressible et non visqueux autour d'un obstacle dont le contour est C . Alors, les composantes de la force qui s'exerce sur l'obstacle sont données par :

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$



DEMO:

→ En chaque point du C , la force qui s'exerce sur l'obstacle est normale à la paroi et d'intensité $p ds$. Si θ est l'angle sur le schéma, on a

$$dF = p ds \vec{r} = p (-\sin \theta, \cos \theta) ds$$

$$\hookrightarrow dF_x - i dF_y = -p (\sin \theta + i \cos \theta) ds = -p i e^{-i\theta} ds$$

→ Comme l'écoulement glisse sur l'obstacle :

$$u = |\vec{u}| \cos \theta \text{ et } v = |\vec{u}| \sin \theta \text{ sur } C \text{ avec } |\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\text{Or } \frac{dw}{dz} = u - i v = |\vec{u}| (\cos \theta - i \sin \theta) = |\vec{u}| e^{-i\theta}$$

→ Par Bernoulli, sans viscosité, on a $p/\rho + \frac{1}{2} \vec{u}^2 = \text{cte} = h \Leftrightarrow p = \left(h - \frac{\vec{u}^2}{2} \right) \rho$

$$\text{Alors } dF_x - i dF_y = - \left(-h + \frac{\vec{u}^2}{2} \rho \right) i e^{-i\theta} ds$$

$$= \left(\frac{1}{2} \rho e^{2i\theta} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - h \right) i e^{-i\theta} ds$$

$$= \frac{1}{2} \rho i \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 e^{i\theta} ds - i h e^{-i\theta} ds$$

$$\Rightarrow F_x - iF_y = \oint \frac{1}{2} \rho i \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \text{ avec } dz = e^{i\theta} ds$$



⊙ Écoulement uniforme autour d'un cylindre

→ On avait montré que $w = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$. Par le thm de Blasius,

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i \rho \oint \left\{ U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right\}^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} i \rho \oint \left\{ U^2 \left(1 + \frac{a^4}{z^4} - 2 \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{2iU\Gamma}{2\pi z} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} \right\} dz$$

$$= \frac{1}{2} i \rho \cdot 2\pi i \cdot \frac{-iU\Gamma}{2\pi} = i \rho U \Gamma \Rightarrow F_y = -\rho U \Gamma \text{ et } F_x = 0$$

4.11 Théorème de la portance de Kutta-J.

Thm

Soit un écoulement stationnaire autour d'un obstacle dans le plan délimité par le contour simple e . Si l'écoulement est uniforme loin de l'obstacle, et que Γ est sa circulation autour de e , on a :

$$F_x = 0 \quad \text{et} \quad F_y = -\rho U \Gamma$$

DEMO:

→ Puisque w n'a pas de singularité en dehors de e , on écrit :

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots = n - i\gamma$$

$$\text{Ainsi: } I = \frac{1}{2} i \oint_{e'} \left(U + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz = \frac{1}{2} i \oint_{e'} \left(U^2 + 2U \frac{a_1}{z} + \dots \right) dz$$

$$= \frac{1}{2} i \oint_{e'} 2\pi i \cdot 2U a_1 = -2\pi \rho U a_1$$

→ Par déformation du contour ($e' \rightarrow e$), on a

$$F_x - iF_y = -2\pi \rho U a_1$$

$$\rightarrow \text{Trouvons } a_1: \oint_e \frac{dw}{dz} dz = 2\pi i \cdot a_1 = [w]_e = [\varphi + i\psi]_e$$

$$= [\varphi]_e \quad \text{car } e \text{ est une ligne de courant}$$

$$= \Gamma \rightarrow a_1 = \Gamma / 2\pi i \quad \text{et donc}$$

$$F_x - iF_y = -2\pi \rho U \Gamma / 2\pi i = i\rho U \Gamma \rightarrow F_x = 0 \quad \text{et} \quad F_y = -\rho U \Gamma$$

